さらば幾何学的 : 代数ギリシア幾何学の理解のために (数学史の研究)

斎藤, 憲

数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 33-36

さらば幾何学的代数
ギリシア幾何学の理解のために

斎藤憲（大阪府立大学）

1 「幾何学的代数」はどうしてこんなに魅力的なのか

1. ギリシア幾何学：主にユークリッド，アルキメデス，アポロニオスの３人の著作によって伝えられる．

2. いうまでもなくその主題は図形．ただし「幾何学的大きさ」(magnitudo 長さ，広さ，嵩）も対象となる（例：平行四辺形は同高同低の三角形の２倍）．

3. 幾何学的代数：19 世紀後半以来，根強く支持を集めている解釈．ギリシア幾何学における magnitudo の扱いの少なくとも一部は本質的に代数的なものであり，それが幾何学的な装いのもとに表現されている，という主張．

4. 「幾何学的代数」とされる代表的な命題：『原論』第２巻，代表的なものに II–5, II–6.

5. この考えは，ギリシア幾何学解釈の一つのためのパラダイムを提供する．このパラダイムはあらゆるパラダイムと同様，中心的な信念と，多くの，互いに支え合う個別の具体的な主張から成る．

6. 「幾何学的代数」の中心的信念：『原論』第２巻が代数であると考えない限り，これらの命題を定式化した動機は理解不能である．

7. 「幾何学的代数」に付随する主張

(a) 『原論』第二巻は幾何学の衣をまとった代数公式の列挙であり，これらの命題は「幾何学的代数」と呼ぶのが適切である．

(b) 『原論』第二巻の代数公式のいくつかはそれぞれある種の連立二次方程式の解法に対応する．

(c) これらの連立二次方程式の解法はバビロニアに存在したものがギリシアに取り入れられたものである．（もっと広く）幾何学的代数はバビロニアの代数のギリシア的表現である．

(d) これらの代数的知識が幾何学の衣をまとった形となっているのは，通約不能量の発見によって，数の領域で二次方程式の解法を表現することが不可能になったからである．

8. 驚くべきことに，これらの主張に資料上の証拠は存在しない．

9. 『原論』第二巻の命題が連立二次方程式の解法の証明に利用可能であることは，数学的には事実である．しかし，これらの命題がそのようなものとしてユークリッドや当時の数学者によって考えられていたとか，ましてや，これらの命題の歴史的起源がこのような代数方程式の解法にあったという証拠は存在しない．

10. 通約不能量の発見が代数学の幾何学化の契機となったという説明はノイゲバウアーに始まるもので，これは非常に人気のある主張であるが，通約不能量の発見が重大な事件であったこと自体が近年は疑問視されている．

11. 「幾何学的代数」説の核心をなす主張—それはそのままこの学説の人気の理由でもある—は，『原論』第二巻の命題があまりにも奇妙で，これらの命題を代数的な知識の回りくどい表現と考える以外にこれらを理解できない，ということである．

12. 上で見た想像上の歴史的事件による説明は，この基盤の上に築かれた二次的な議論でしかないのである．

13. 逆に言えば，代数的な解釈をせずに『原論』第二巻の諸命題，そしてギリシア幾何学における幾何学量の扱いを説明することができれば，幾何学的代数の主張は，その根底における根拠を失うことになる．

2 問題の整理

14. 幾何学的代数にまつわる論点を整理してみる.
    (a) いわゆる幾何学的代数の起源
    (b) これらの命題が原論に収録された理由
    (c) これらの命題のギリシア数学における役割

15. 研究者たちは1と2について楽しく空想を広げてきて，それが20世紀のギリシア数学史に関する研究文献の大きな部分を占めてきた．しかしまず，唯一資料が残されている3.について議論すべきである．それは1.2に関するこれまでの空想の蓋然性を大きく減じるであろう.

3 幾何学的代数の利用の場面

16. 圧倒的にII–5, 6．我々にとって基本的と思われるII–4, 7はずっと少ない.

17. 議論の特徴
    (a) 与えられた図形を，その場で，その配置のままで扱う.
    (b) 円や円錐曲線の弦のように，線分の中点が幾何学的に意味のある点である場合が多い．したがってII–5, 6の利用が増える.

18. 代数的な量の扱いという観点からすればII-1ですべての場合が解決する．II-5,6が頻繁に使われることは,「幾何学的代数」は特別な配置・関係にあるmagnitudoの扱いに片寄っていることを示唆する.

19. 代表的な利用例
    (a) 方巾の定理
    (b) 『円錐曲線論』II–10

20. 「幾何学的代数」は円錐曲線に関する議論のための道具立てとして自然に理解できる.

21. この種の議論を代数的な議論と同等なものとして説明するのは，代数的な量の扱いに習熟し，ギリシア人の固有のテクニックに不慣れな現代人に，ギリシア幾何学の内容を手っ取り早く理解させる便法以上のものではない．

22. 幾何学的代数をはじめとするギリシア幾何学のテクニックが，代数的解釈以外では理解されえないと主張する前に，代数学を習得するまでにかけた時間と労力と同じ時間と労力を，ギリシアの種々の定理とテクニックのために費やしてみるべきではないか．

4　そもそもギリシア数学における問題とは

23. II-5,6 が代数方程式の解法であるという主張．

24. 『デドメナ』84, 85 の存在．

25. そもそもギリシア幾何学における「問題」とはどのようなものか．

    (a) 図形の等積変形（立方体倍積，円の方形化，相似図形の作図，求積法一般）

    (b) 等分問題（角の三等分など）

    (c) 軌跡問題（条件を満たす線を求める．アポロニオスの円，四線問題）

    場所・配置から切り離された純粋な「量」に関する関心を認めることは困難．

26. 従来のギリシア幾何学に対するアプローチは，まずそこで扱われる magnitudo を場所から切り離して（すなわち最も重要で目につく特徴を切り捨てて），代数的言語で記述して，そこで使われたであろうテクニックの起源や意義を論じていた．このアプローチからギリシア人の関心と思考を復元することはできない．